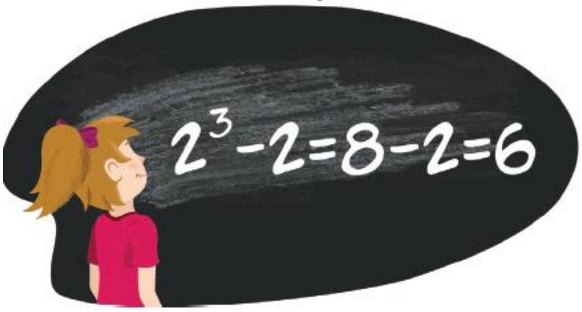
GABARITO

IX Olimpíada Interna de Matemática - Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

(A prova contem 5 questões com itens A e B. Cada item vale 1 ponto. Respostas sem justificativa não serão consideradas.)

01 Andressa faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número ao cubo e subtrai desse cubo o próprio número. Veja na figura que o resultado do cálculo de Andressa com o número 2 é igual a 6.



a) Qual é o resultado do cálculo de Andressa com o número 3?

O resultado de Andressa com o número 3 é $3^3 - 3 = 27 - 3 =$ **24.**

b) Qual é o número que deve ser escolhido por Andressa para que o resultado do cálculo seja 1320?

Utilizando as formas de fatoração, temos que

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = 1320$$

Isto nos diz que o produto de três números consecutivos é 1320. Usando cálculos mentais, por aproximação, como $10^3 = 1000$ e como a unidade do número 1320 é 0, testamos n = 11. Nesse caso, como 11 x 10 x 12 = 1320, **concluímos que, de fato, n = 11 deve ter sido o número escolhido por Andressa para que ela tenha obtido 1320 como resultado.** Observe que outro teste natural seria 14 x 13 x 15, que também tem unidade 0, mas é maior do que 1320.

02 Flávio inventou as operações matemáticas # e @ entre números inteiros, como abaixo:

- $a \# b = a^2 + b^2$
- $a @ b = (a + b)^2$

Por exemplo, $1 \# 4 = 17$ e $1 @ (-6) = 25$. Utilizando as operações criadas por Flávio, responda às perguntas abaixo:

a) Qual é o valor de $(2 @ 3) - (2 \# 3)$?

$(2@3) - (2\#3) = (2+3)^2 - (2^2 + 3^2) = 25 - (4 + 9) = 25 - 13 =$ **12.**

b) Se $(x - 5)\#(y - 6) = 0$, qual é o valor de $x @ y$?

Se (x-5) # (y-6) = 0 então $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 0$. A soma de dois quadrados é igual a 0 se, e somente se, cada uma das parcelas da soma for igual a 0. Logo, x = 5 e y = 6.

Assim, $x@y = (5 + 6)^2 = 11^2 =$ **121.**

03 O treinador de um time de futebol desconhece a média das idades de seus 11 jogadores. Porém, ele possui as seguintes informações:

- o capitão tem 30 anos;
- o goleiro tem 23 anos;
- a média de idade do time sem esses dois jogadores é um ano menor do que a média de idade do time completo.

a) Calcule a média de idade do time completo.

11x = soma das idades de todos os jogadores.

Somas das idades dos demais jogadores, excetuados os de 30 e 23 anos = (11x – 53).

$$\frac{11x-53}{9}=x-1$$

$$11x-53=9x-9$$

$$2x=44$$

$$x=22$$

b) Duas latas contêm 250 ml e 350 ml de um mesmo suco e são vendidas, respectivamente, por R$ 3,00 e R$ 4,90.

Tomando por base o preço por mililitro do suco, calcule quantos por cento a lata maior é mais cara do que a lata menor.

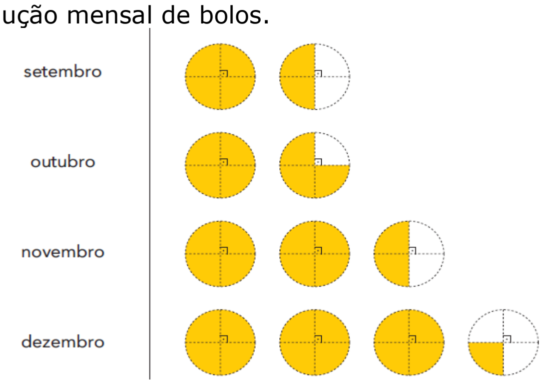
Lata menor: $\frac{3{,}00}{250ml}=\frac{0{,}60}{50ml}$

Lata maior: $\frac{4{,}90}{350ml}=\frac{0{,}70}{50ml}$

A lata maior, por 50 ml, é R$ 0,10 mais cara do que a menor.

$$\left.\begin{array}{lcl} \frac{0{,}60}{50\text{ ml}} & — & 100\% \\ \frac{0{,}10}{50\text{ ml}} & — & x \end{array}\right\} \Rightarrow 6x = 100\% \Rightarrow x \cong 16{,}6\%$$

04 Uma fábrica de bolos vendeu de setembro até dezembro um total de 2160 bolos. O pictográfico a seguir representa frações que correspondem à produção mensal de bolos.



a) Calcule o número de bolos vendidos no mês de novembro.

O número de unidades de bolo vendidas corresponde ao número de discos desenhados. Assim:

setembro ________ 1 + $\frac{1}{2}$

outubro __________ 1 + $\frac{3}{4}$

novembro _________ 2 + $\frac{1}{2}$

dezembro __________ 3 + $\frac{1}{4}$

Total = 9 discos.

No mês de novembro, foram vedidos N bolos, logo:

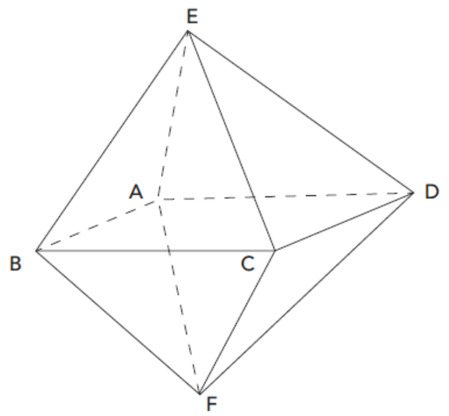
$$\left.\begin{array}{lcl} 9 \text{ discos} & — & 2160 \text{ bolos} \\ 2{,}5 \text{ discos} & — & N \end{array}\right\} \Rightarrow N = \frac{2160 \times 2{,}5}{9}$$

N = 600 bolos.

b) A caixa d'água de uma residência continha, às 8 horas da manhã de um determinado dia, 600 litros de água. Ela foi abastecida durante 2 horas, recebendo um volume de água na razão constante de 20 litros por minuto. Às 10 horas, ficou completamente cheia; a partir desse momento, começou a perder água na razão constante de 15 litros por minuto, sem reposição alguma, até esvaziar. Considerando esse processo, calcule o horário em que a caixa ficou totalmente vazia.

Volume total da caixa: V = 600 + 120 min x 20 litros / min ∴ V = 3000 litros.
Se o tempo necessário para esvaziar a caixa é de t minutos, então:
(15 litros / min) x t min = 3000 litros ∴ t = 200 min ∴ t = 3 horas e 20 min.
A caixa ficou totalmente vazia às 13h e 20 minutos.

05 A figura a seguir representa um objeto com a forma de um octaedro. Admita que suas arestas, feitas de arames fixados nos vértices, possuem os comprimentos indicados na tabela.



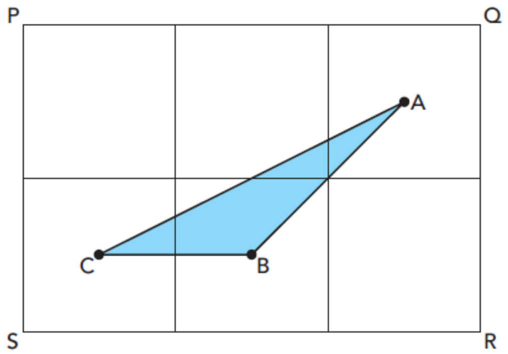
Arestas	AB	AD	AE	AF	BC	BE	BF	CD	CE	CF	DE	DF
Comprimento (cm)	10	11	12	10	11	12	11	12	11	10	12	12

a) Calcule o menor comprimento do arame, em centímetros, necessário para construir esse objeto.

O menor comprimento necessário é a soma das medidas das arestas: AB + AD + AE + AF + ... + DF

Soma = 10.(3) + 11.(4) + 12.(5) = **134 cm**

b) O retângulo PQRS é formado por seis quadrados cujos lados medem 2 cm.



Determine a área do triângulo ABC tomando como unidade a área de um quadrado de lado igual a 2 cm.

Se a base do triângulo ABC é BC, a altura é a distância h_A do vértice A à reta que contém BC. Nesse caso, $\overline{BC}$ = 2cm e h_A = 2cm.

Então, a área desse triângulo

$$S = \frac{\overline{BC} \times h_A}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ cm}^2.$$

Como a unidade de área dada é 4cm^2, **a área do triângulo é 0,5 unidade de área.**

-----------------------RASCUNHO---------------------